

134335

Herrn Geh. Rats Schröder  
mit hochachtungsvollem Gruße

H. Voss.

6164  
—  
4,56

XII

ECA  
ALE

tti

ocale





K 76567

D 100025534970

ALA Malfatti

Saggi 6

Ala Biblioteca  
comunale

Fondo locale



# BERICHTE

DER

K. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

SITZUNG AM 11. FEBRUAR 1889.





C. Neumann, Ueber das Malfatti'sche Problem.

Ist irgend ein Dreieck mit den Seiten  $\alpha, \beta, \gamma$  gegeben, so kann man zunächst dieses Dreieck durch die Halbierungslinien  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  seiner Innenwinkel in drei kleinere Dreiecke zerlegen, und sodann für jedes dieser drei kleineren Dreiecke den einbeschriebenen Kreis construiren. Bezeichnet man diese Kreise mit  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ , so werden die beiden Kreise  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$ , ausser  $\alpha_1$ , noch eine zweite gemeinschaftliche innere Tangente besitzen, welche  $\alpha_2$  heissen mag. In analoger Weise mögen  $\beta_2$  und  $\gamma_2$  defnirt sein. Ist also das ursprüngliche Dreieck  $\alpha\beta\gamma$  gegeben, so werden die Linien und Kreise  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  ebenfalls als *gegeben* zu betrachten sein.

Das *Malfatti'sche Problem* besteht nun darin, in das gegebene Dreieck  $\alpha\beta\gamma$  drei Kreise  $\xi, \eta, \zeta$  hineinzulegen, der Art, dass  $\xi$  die beiden Kreise  $\eta, \zeta$  und zugleich auch die beiden Dreiecksseiten  $\beta, \gamma$  berührt, und dass ferner  $\eta$  und  $\zeta$  den analogen Anforderungen entsprechen. Bezeichnet man die gegenseitigen Berührungspunkte dieser noch unbekannten Kreise  $\xi, \eta, \zeta$  mit  $x, y, z$ , ferner die Tangenten der Kreise  $\xi, \eta, \zeta$  in den Punkten  $x, y, z$  mit  $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ , so wird man offenbar die Kreise  $\xi, \eta, \zeta$  ohne Weiteres construiren können, falls man nur die Linien  $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$  zu construiren im Stande ist.

Eine Construction der Linien  $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$  und zwar eine Construction von überraschender Einfachheit ist aber bekanntlich von STEINER gegeben worden im Jahre 1826. Steiner gelangte nämlich in dieser Beziehung zu dem höchst merkwürdigen Satz, dass  $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$  identisch sind mit  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ . Um diesen STEINER'schen Satz zu beweisen, wird darzuthun sein, dass z. B.  $\alpha_3$  die beiden Kreise  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  berührt. Kurz es wird darzuthun sein, dass die Linien  $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$  folgende Eigenschaften besitzen:



$$(E.) \quad \begin{cases} \alpha_3 \text{ tangential zu } \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \\ \beta_3 \text{ tangential zu } \mathfrak{C}, \mathfrak{A}, \\ \gamma_3 \text{ tangential zu } \mathfrak{A}, \mathfrak{B}. \end{cases}$$

STEINER hat bekanntlich im Jahre 1826 den in Rede stehenden Satz d. i. die Eigenschaften (E.) ohne Beweis publicirt. Unter den seit jener Zeit gefundenen Beweisen sind mir genauer bekannt die von SCHRÖTER<sup>1)</sup>, BISCHOFF<sup>2)</sup> und PETERSEN<sup>3)</sup>. Und unter diesen drei Beweisen ist nach meinem Dafürhalten der SCHRÖTER'sche als der einfachste zu bezeichnen. Doch dürfte derselbe wohl einer noch weiteren Vereinfachung fähig sein.

Die Betrachtungen nämlich, deren SCHRÖTER bei Führung seines Beweises sich bedient, entspringen aus zwei verschiedenen Quellen, einerseits aus der *Theorie der reciproken Radien*, und andererseits aus der *Theorie der Aehnlichkeitspunkte*. Von diesen beiden Quellen aber kann die letztere vollkommen ausgeschaltet werden. Und hierdurch erlangt alsdann, wie ich im gegenwärtigen Aufsatz zu zeigen beabsichtige, der SCHRÖTER'sche Beweis nicht allein eine sehr bedeutende Abkürzung, sondern vor allen Dingen auch eine viel grössere Einfachheit und Uebersichtlichkeit, indem derselbe alsdann nur noch auf der *Theorie der reciproken Radien* beruht. Um näher hierauf einzugehen, mag es mir zuvörderst gestattet sein, zwei ganz elementare Hülfsätze voranzuschicken.

Erster Hülfsatz. — Es seien  $P, Q, \sigma, \tau$  vier Kreise. Der Kreis  $\sigma$  mag die beiden Kreise  $P, Q$  gleichartig berühren. Und ebenso mag auch  $\tau$  jene beiden Kreise  $P, Q$  gleichartig berühren. Alsdann bilden die vier Berührungspunkte stets ein Kreisviereck. — Der Beweis dieses Satzes kann in sehr einfacher Weise dadurch erhalten werden, dass man die beiden Kreise  $P, Q$  durch

1) SCHRÖTER: Die Steiner'sche Auflösung der Malfatti'schen Aufgabe. 1874. Crelle's Journal. Bd. 77. Seite 230. Diese SCHRÖTER'schen Untersuchungen haben eine weitere Vervollständigung erhalten durch den kurzen aber inhaltsreichen Aufsatz von GODT: Ueber die STEINER'sche Verallgemeinerung des MALFATTI'schen Problems. Crelle's Journ. Bd. 84. S. 259.

2) Der von Prof. BISCHOFF in München gegebene Beweis ist mir nur durch ein Manuscript bekannt geworden.

3) PETERSEN: Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Constructionsaufgaben, ins Deutsche übertragen von Dr. von FISCHER-BENZON. Kopenhagen. 1879. Daselbst auf Seite 402—404.



die Methode der reciproken Radien in zwei gleich grosse Kreise verwandelt.

*Zweiter Hilfssatz. — Denkt man sich beliebig viele gerade Linien, die alle isogonal sind zu einem gegebenen Kreise, so wird stets ein mit diesem Kreise concentrischer Kreis existiren, welcher all' jene geraden Linien berührt. — Der Beweis dieses Satzes ergibt sich sofort, und bedarf keiner weiteren Erläuterung.*

Um nun den Beweis der Eigenschaften (E.) wirklich zu führen, bezeichnen wir diejenigen Punkte, in denen die Dreiecksseiten  $\alpha, \beta, \gamma$  von den MALFATTI'schen Kreisen berührt werden mit  $A, A, B, B, C, C$ , unter Beifügung passender Indices. Es mögen nämlich  $A_\eta$  und  $A_\zeta$  diejenigen Punkte heissen, in denen die Dreiecksseite  $\alpha$  von den beiden MALFATTI'schen Kreisen  $\eta$  und  $\zeta$  berührt wird. Und in analoger Art mögen  $B_\zeta, B_\xi$  und  $C_\xi, C_\eta$  definirt sein. Alsdann werden die beiden Kreise  $\eta$  und  $\zeta$  einerseits von  $\alpha$  berührt, in den Punkten  $A_\eta$  und  $A_\zeta$ , andererseits aber auch vom Kreise  $\xi$  berührt, in den Punkten  $z$  und  $y$ . Die vier genannten Punkte  $A_\eta, A_\zeta, y, z$  müssen daher, zufolge des ersten Hilfssatzes, ein *Kreisviereck* bilden. Bezeichnen wir also den betreffenden Kreis selber mit  $U$ , und definiren wir in analoger Weise die Kreise  $V$  und  $W$ , so werden  $U, V, W$  respective durch folgende Punkte hindurchgehen:

$$\begin{aligned} U &\rightsquigarrow y, z, A_\eta, A_\zeta, \\ (1.) \quad V &\rightsquigarrow z, x, B_\zeta, B_\xi, \\ W &\rightsquigarrow x, y, C_\xi, C_\eta. \end{aligned}$$

Der Kreis  $U$  schneidet den Kreis  $\zeta$  in den beiden Punkten  $A_\zeta$  und  $y$ , d. i. in denjenigen beiden Punkten, in denen der Kreis  $\zeta$  respective von  $\alpha$  und  $\beta_3$  berührt wird. Folglich wird der Kreis  $U$  diese beiden Linien  $\alpha$  und  $\beta_3$  unter *gleichen* Winkeln schneiden; was angedeutet sein mag durch die Formel:

$$(2.) \quad U \text{ isogonal zu } \alpha, \beta_3.$$

Gleichzeitig wird offenbar, zufolge der Symmetrie unserer Betrachtungen und Bezeichnungen, auch folgende analoge Formel zu notiren sein:

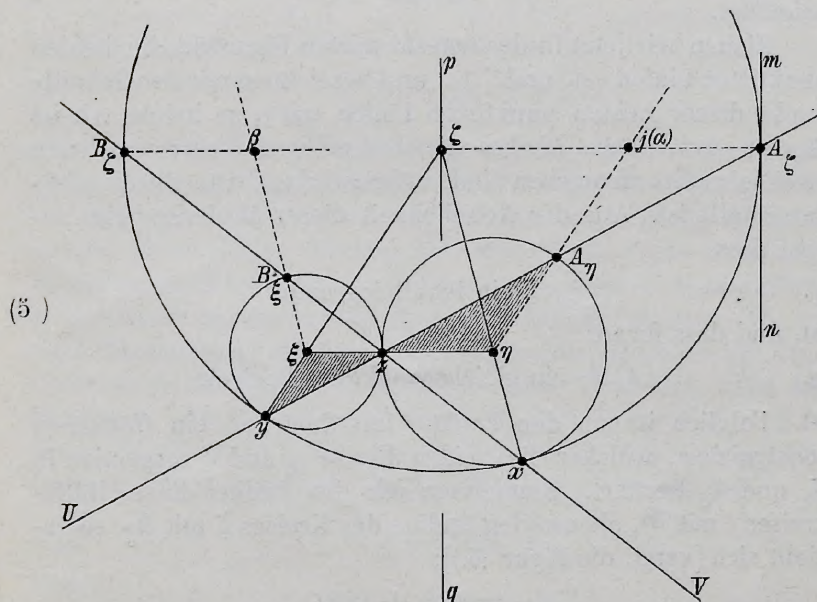
$$(3.) \quad U \text{ isogonal zu } \alpha, \gamma_3.$$

Um nun in unserer Untersuchung einen Schritt vorwärts zu kommen, wollen wir die aus den Linien, Kreisen und Punkten

$$(4.) \quad \alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta, x, y, z, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3, U, V$$

bestehende Figur<sup>1)</sup> in eine etwas *einfachere* Figur zu verwandeln suchen durch Anwendung der Methode der reciproken Radien. Die beiden Kreise  $U$  und  $V$  schneiden sich, ausser in  $z$ , noch in einem zweiten Punkte, welcher  $O$  heissen mag. Transformiren wir also die Figur (4.) von diesem Punkte  $O$  aus, nach der Methode der reciproken Radien, so werden wir dadurch den Vortheil erhalten, dass jene beiden durch  $O$  gehenden Kreise  $U$  und  $V$  in *gerade Linien* sich verwandeln.

Die transformirte Figur sei dargestellt durch:



Es mögen nämlich in dieser transformirten Figur die Centra der Kreise  $\xi, \eta, \zeta$  mit ebendenselben Buchstaben  $\xi, \eta, \zeta$  bezeichnet sein; so dass also die Berührungspunkte  $x, y, z$  respective auf den Centrallinien  $\eta\zeta, \zeta\xi, \xi\eta$  oder auf den Verlängerungen derselben anzutreffen sind. Die Kreise  $U, V$  verwandeln sich, wie schon bemerkt wurde, bei der Transformation in *gerade*

<sup>1)</sup> Der Leser wird gebeten, diese Figur (4.), welche weiterhin die *ursprüngliche* Figur heissen soll, wirklich zu zeichnen.



*Linien.* Und zwar werden, weil  $U$  und  $V$  [vergl. (1.)] respective durch die Punkte  $y, z$  und  $x, z$  hindurchgehen, die durch die Transformation entstehenden *geraden Linien*  $U$  und  $V$  respective durch die geraden Linien  $yz$  und  $xz$  dargestellt sein, [vergl. die in (5.) gegebene Zeichnung]. Der Kreis  $U$  geht [vergl. (1.)] durch die vier Punkte  $y, z, A_\eta, A_\zeta$  hindurch; und zwar sind  $y$  und  $A_\zeta$  seine Schnittpunkte mit dem Kreise  $\zeta$ , andererseits  $z$  und  $A_\eta$  seine Schnittpunkte mit dem Kreise  $\eta$ . Gleiches gilt daher in der transformirten Figur von der *geraden Linie*  $U$ . Und demgemäss sind in dieser transformirten Figur (5.) den Schnittpunkten der geraden Linie  $U$  die Buchstaben  $y, z, A_\eta, A_\zeta$  beigelegt. Ueberdies sind daselbst in analoger Weise den Schnittpunkten der geraden Linie  $V$  die Buchstaben  $x, z, B_\xi, B_\zeta$  beigelegt.

Ziehen wir jetzt in der transformirten Figur (5.) die beiden punktirten Linien  $\eta A_\eta$  und  $\zeta A_\zeta$ , und bezeichnen wir den Schnittpunkt dieser beiden punktirten Linien mit  $j$ , so haben wir im Ganzen *drei einander ähnliche gleichschenklige Dreiecke*, von denen zwei schraffirt angegeben sind, während das dritte durch  $y\zeta A_\zeta$  dargestellt ist. Aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke folgt sofort, dass

$$(f.) \quad \xi \eta j \zeta \text{ ein Parallelogramm}$$

ist, und dass ferner

$$(g.) \quad j A_\eta A_\zeta \text{ ein gleichschenkliges Dreieck}$$

ist. Folglich ist um den Punkt  $j$  (als Centrum) ein *Hilfskreis* construierbar, welcher die beiden Kreise  $\eta$  und  $\zeta$  respective in  $A_\eta$  und  $A_\zeta$  berührt. Bezeichnen wir den Radius dieses Hilfskreises  $j$  mit  $R_j$ , ebenso den Radius des Kreises  $\zeta$  mit  $R_\zeta$ , so ergibt sich [vergl. die Figur (5.)]:

$$(\zeta A_\zeta) = (\zeta j) + (j A_\zeta),$$

$$\text{d. i. } R_\zeta = (\zeta j) + R_j,$$

$$\text{d. i. } R_j = R_\zeta - (\zeta j).$$

Die letzte Formel aber ist, mit Rücksicht auf die aus (f.) entspringende Gleichung  $(\zeta j) = (\xi \eta)$ , auch so darstellbar:

$$(h.) \quad R_j = R_\zeta - (\xi \eta).$$

Um nun die eigentliche Natur des Hilfskreises  $j$  zu erkennen, müssen wir uns daran erinnern, dass  $\alpha$  in der *ursprünglichen*



Figur (4.) eine gerade Linie repräsentirt, welche die Kreise  $\eta$  und  $\zeta$  respective in den Punkten  $A_\eta$  und  $A_\zeta$  berührt. In der transformirten Figur (5.) wird daher  $\alpha$  ein Kreis sein, welcher ebenfalls die Kreise  $\eta$  und  $\zeta$  respective in  $A_\eta$  und  $A_\zeta$  berührt. Hieraus aber folgt sofort, dass dieser Kreis  $\alpha$  in der transformirten Figur (5.) nichts Anderes ist, als der schon besprochene Hilfskreis  $j$ . Demgemäss erscheint es angemessen, den Buchstaben  $j$  fortan fallen zu lassen, denselben nämlich zu ersetzen durch  $\alpha$ ; wie solches in der Figur (5.) angedeutet sein soll durch das dem  $j$  in Parenthese beigefügte  $\alpha$ . Bei dieser Abänderung der Bezeichnungsweise ergibt sich aus (f.), dass  $\xi\eta\alpha\zeta$  ein Parallelogramm, mithin z. B.

$$(F.) \quad \zeta\alpha \text{ parallel } \xi\eta$$

ist. Gleichzeitig ergibt sich alsdann aus (h.):

$$(H.) \quad R_\alpha = R_\zeta - (\xi\eta);$$

und zwar ist in diesen Formeln (F.) und (H.) unter  $\alpha$  der Mittelpunkt, und unter  $R_\alpha$  der Radius des Kreises  $\alpha$  zu verstehen.

Analoges wird offenbar zu bemerken sein in Bezug auf denjenigen Kreis  $\beta$ , in welchen sich die gerade Linie  $\beta$  bei der Transformation verwandelt. Zieht man nämlich in der transformirten Figur (5.) die beiden punktirten Linien  $\xi B_\xi$  und  $\zeta B_\zeta$ , so wird der Schnittpunkt dieser beiden punktirten Linien mit dem Centrum  $\beta$  des Kreises  $\beta$  identisch sein. Ueberdies wird die Peripherie dieses Kreises  $\beta$  durch  $B_\xi$  und  $B_\zeta$  gehen, und in diesen Punkten die Kreise  $\xi$  und  $\zeta$  berühren. Zugleich werden folgende mit (F.) und (H.) analoge Formeln zu notiren sein:

$$(F_1.) \quad \zeta\beta \text{ parallel } \xi\eta,$$

und

$$(H_1.) \quad R_\beta = R_\zeta - (\xi\eta),$$

wo  $\beta$  den Mittelpunkt, und  $R_\beta$  den Radius des Kreises  $\beta$  vorstellen.

Aus (F.), (F<sub>1</sub>.), und (H.), (H<sub>1</sub>.) folgt nun sofort:

$$(J.) \quad \zeta\alpha \text{ parallel } \zeta\beta$$

und

$$(K.) \quad R_\alpha = R_\beta.$$



Die Formel (J.) zeigt, dass die fünf Punkte  $A_\zeta, \alpha, \zeta, \beta, B_\zeta$  in *gerader Linie* liegen, dass dieselben also einen *Durchmesser* des Kreises  $\zeta$  repräsentiren. Andererseits zeigt die Formel (K.), dass die beiden Kreise  $\alpha$  und  $\beta$ , welche den Kreis  $\zeta$  in den Endpunkten dieses Durchmessers berühren, beide *gleichgross* sind. Construiren wir also im Kreise  $\zeta$  den zum Durchmesser  $A_\zeta \alpha \zeta \beta B_\zeta$  senkrechten Durchmesser  $p \zeta q$  [vergl. die Figur (5.)], so wird dieser letztere zu bezeichnen sein als eine *Symmetrielinie* der beiden Kreise  $\alpha, \beta$ .

Denken wir uns in der *ursprünglichen* Figur, ausser dem Kreise  $\zeta$ , noch beliebig viele andere Kreise  $\zeta', \zeta'', \zeta''', \dots$  construirt, welche alle, ebenso wie  $\zeta$ , die beiden Linien  $\alpha, \beta$ , und zwar in der nämlichen Weise wie  $\zeta$ , berühren, so werden offenbar all' diese Kreise  $\zeta, \zeta', \zeta'', \zeta''', \dots$  von der Halbierungslinie  $\gamma_1$  des Winkels  $\alpha\beta$  *senkrecht* geschnitten werden. Analoges muss daher auch in der *transformirten* Fig. (5.) stattfinden. Es muss daher die Linie  $\gamma_1$  bei der Transformation in einen Kreis  $\gamma_1$  sich verwandeln, welcher die Eigenschaft hat, orthogonal zu sein nicht nur zum Kreise  $\zeta$ , sondern auch zu all' denjenigen Kreisen  $\zeta', \zeta'', \zeta''', \dots$ , welche die beiden Kreise  $\alpha$  und  $\beta$  in der nämlichen Weise wie  $\zeta$  berühren. Nun sind aber, wie wir gefunden haben, die Kreise  $\alpha$  und  $\beta$  in der transformirten Figur (5.) *gleichgross*. Folglich muss der Kreis  $\gamma_1$  daselbst dargestellt sein durch die *Symmetrielinie* der beiden Kreise  $\alpha, \beta$ , also dargestellt sein durch den schon construirten *Durchmesser*  $p \zeta q$ .

Legen wir jetzt in der transformirten Figur (5.) im Punkte  $A_\zeta$  eine Tangente  $mn$  an die daselbst einander berührenden Kreise  $\zeta$  und  $\alpha$ , so ist offenbar:

$$mn \text{ parallel } pq.$$

Folglich werden diese beiden Linien  $mn$  und  $pq$  von der Transversalen  $U$  unter *gleichen* Winkeln geschnitten. Also:

$$U \text{ isogonal zu } mn, pq.$$

Diese Formel kann, weil  $mn$  Tangente des Kreises  $\alpha$  im Punkte  $A_\zeta$ , andererseits aber  $pq$ , wie soeben bemerkt wurde, identisch mit  $\gamma_1$  ist, auch so geschrieben werden:

$$(6.) \quad U \text{ isogonal zu } \alpha, \gamma_1.$$

Selbstverständlich muss diese für die *transformirte* Figur



gefundene Formel (6.) auch gültig sein für die *ursprüngliche* Figur. Denken wir uns dieselbe aber auf diese letztere Figur bezogen, so muss, wie aus der Symmetrie unserer Bezeichnungen ohne Weiteres sich ergibt, auch folgende analoge Formel stattfinden:

$$(7.) \quad U \text{ isogonal zu } \alpha, \beta_1.$$

Durch Zusammenfassung der vier für die *ursprüngliche* Figur erhaltenen Formeln (2.), (3.) und (6.), (7.) erhalten wir nun sofort:

$$(8.) \quad U \text{ isogonal zu } \alpha, \beta_1, \gamma_1, \beta_3, \gamma_3.$$

In der ursprünglichen Figur schneidet also der Kreis  $U$  die fünf geraden Linien  $\alpha, \beta_1, \gamma_1, \beta_3, \gamma_3$  unter *gleichen* Winkeln. Zuzufolge unseres zweiten Hülfsatzes muss daher ein mit  $U$  concentrischer Kreis  $U_0$  existiren, welcher die Eigenschaft hat, jene fünf geraden Linien zu berühren. Also:

$$(9.) \quad U_0 \text{ tangential zu } \alpha, \beta_1, \gamma_1, \beta_3, \gamma_3.$$

Dieser Kreis  $U_0$  berührt also z. B. auch die drei Linien  $\alpha, \beta_1, \gamma_1$ , und wird daher, wie aus der Definition des Kreises  $\mathfrak{A}$  folgt, identisch sein mit  $\mathfrak{A}$ . Somit gewinnt die Formel (9.) folgende Gestalt:

$$(10.) \quad \mathfrak{A} \text{ tangential zu } \alpha, \beta_1, \gamma_1, \beta_3, \gamma_3.$$

In analoger Weise werden sich nun offenbar analoge Formeln ergeben für die Kreise  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$ ; so dass wir also, Alles zusammengefasst, folgende drei Formeln erhalten:

$$(11.) \quad \begin{aligned} \mathfrak{A} & \text{ tangential zu } \alpha, \beta_1, \gamma_1, \beta_3, \gamma_3, \\ \mathfrak{B} & \text{ tangential zu } \beta, \gamma_1, \alpha_1, \gamma_3, \alpha_3, \\ \mathfrak{C} & \text{ tangential zu } \gamma, \alpha_1, \beta_1, \alpha_3, \beta_3. \end{aligned}$$

Hieraus aber folgt sofort:

$$(12.) \quad \begin{aligned} \alpha_3 & \text{ tangential zu } \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \\ \beta_3 & \text{ tangential zu } \mathfrak{C}, \mathfrak{A}, \\ \gamma_3 & \text{ tangential zu } \mathfrak{A}, \mathfrak{B}. \end{aligned}$$

Und dies sind die zu beweisenden Eigenschaften ( $E$ .) der Linien  $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ . [Vergl. die zweite Seite dieses Aufsatzes.]

## Bemerkung.

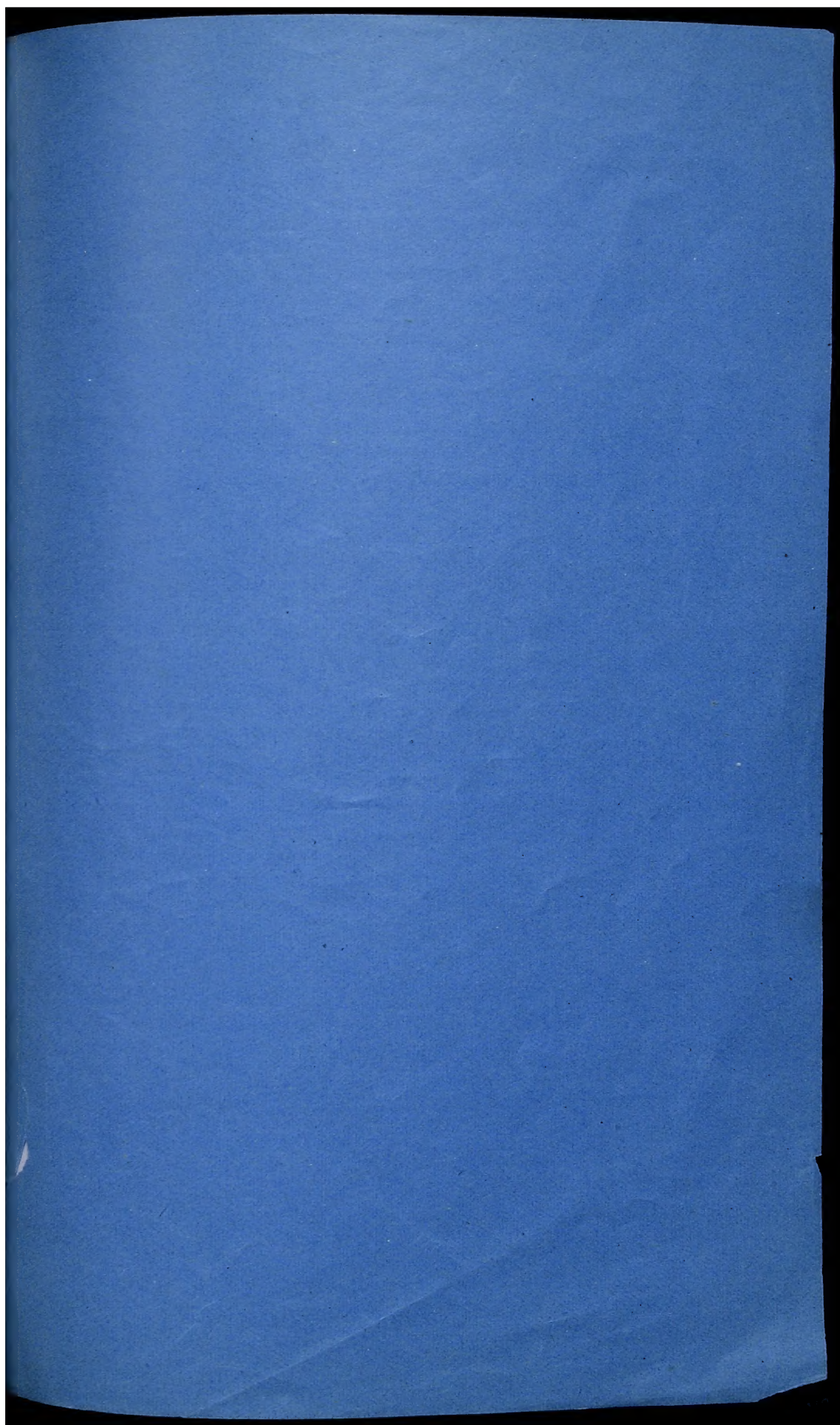
Der auf der ersten Seite dieses Aufsatzes angegebene Steiner'sche Satz, dass  $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$  mit  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  identisch sind, gilt auch dann noch, wenn die von Hause aus gegebenen Linien  $\alpha, \beta, \gamma$  nicht gerade Linien, sondern Kreise sind. Nur hat man in diesem allgemeineren Falle in den Definitionen von  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$  gewisse Abänderungen eintreten zu lassen. Setzt man der Einfachheit willen voraus, dass von den gegebenen Kreisen  $\alpha, \beta, \gamma$  jeder ausserhalb der beiden andern liegt, so sind diese Abänderungen folgende:

I. — Bezeichnet  $q$  den gemeinschaftlichen Orthogonalkreis jener drei von Hause aus gegebenen Kreise  $\alpha, \beta, \gamma$ , so hat man unter  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  nicht mehr gerade Linien, sondern zu  $q$  orthogonale Kreise zu verstehen. Insbesondere hat man unter  $\alpha_1$  die senkrechte Trajectorie all' derjenigen Kreise zu verstehen, welche die beiden gegebenen Kreise  $\beta$  und  $\gamma$  gleichartig berühren oder auch unter gleichen Winkeln schneiden. Und in analoger Weise hat man  $\beta_1$  und  $\gamma_1$  zu definiren.

II. — Was  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  und  $\xi, \eta, \zeta, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$  anbelangt, so hat man unter  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$  nicht mehr gerade Linien, sondern zu  $q$  orthogonale Kreise zu verstehen, im Uebrigen aber die für  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \xi, \eta, \zeta, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$  gegebenen Definitionen beizubehalten.

Solches festgesetzt, werden alsdann die vorhin angestellten Betrachtungen, abgesehen von gewissen leicht sich ergebenden Modificationen, Schritt für Schritt in Gültigkeit bleiben, und zu dem Resultat führen, dass auch in diesem allgemeineren Falle  $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$  mit  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  identisch sind.







BIBLIO  
COMU

AL  
Mal  
Sag  
6

Fondo  
AL